Überblick über Verfahren zur Netzwerksberechnung

1. Geschlossene Berechnungsverfahren

- ✓ Berechnung aller Zweigströme des Netzwerkes
  (Beispiel $z = 6$, $k = 4$, $m = 3$)

- ✓ Verfahren unterscheiden sich nach der Zahl der unbekannten Ströme/Spannungen und damit nach dem Berechnungsaufwand

Zweigstromverfahren (Elimination der Spannungen)

- ➢ Zahl der Unbekannten: $z = (k\text{-}1) + m$ (Beispiel $z = 6$)

Maschenstromverfahren (Elimination der Knotengleichungen)

- ➢ Zahl der Unbekannten: $m = z – (k\text{-}1)$ (Beispiel $m = 3$)

Knotenspannungsverfahren (Elimination der Maschengleichungen)

- ➢ Zahl der Unbekannten: $(k\text{-}1) = z – m$ (Beispiel $k\text{-}1 = 3$)

Zweigstromverfahren

zu lösende Gleichungen, z-Zweigströme
$z = (k-1) + m$

<u>Lösungsalgorithmus</u>

1. Netzwerksstruktur, Graph, Ermittlung von z, k, m

2. Eintragung der Zählpfeile für jeden Zweigstrom $I_1 \ldots I_z$

3. Eintragung der Zählpfeile für alle Quellenspannungen ($U_{q1} \ldots U_{qx}$) bzw. Quellenströme ($I_{k1} \ldots I_{kx}$)

4. Zählpfeile für Spannungen über n-Widerständen $R_1 \ldots R_n$ eintragen, Festlegung der k-1-unabhängigen Knoten und der m-unabhängigen Maschen, Maschenumlauf festlegen

5. Gleichungssystem aufstellen

6. Lösung des Gleichungssystems $I_1 \ldots I_z$

7. Berechnung der Spannungen über den Widerständen z.B. $U_1 = I_1 \cdot R_1$

Matrizengleichungen

1. Gleichungssystem allgemein

$$a_{11} \cdot b_1 + a_{12} \cdot b_2 + a_{13} \cdot b_3 = c_1$$
$$a_{21} \cdot b_1 + a_{22} \cdot b_2 + a_{23} \cdot b_3 = c_2$$
$$a_{31} \cdot b_1 + a_{32} \cdot b_2 + a_{33} \cdot b_3 = c_3$$

2. Gleichungssystem in Matrizenform

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Koeffizientenmatrix Spaltenmatrix Ergebnismatrix

3. Matrizengleichung – lineare Netzwerksberechnung (Gleichstromkreise)

$$(R) * (I) = (U)$$

mit Kehrmatrix (Leitwertmatrix)

$$(R)^{-1} * (U) = (I)$$

Beispiel – Zweigstromverfahren

Lösungsverfahren: Matrizeninversion (Kehrmatrix)

1. Gleichungssystem ([I]=1A, [U]=1V, [R]=1Ω)

$$\begin{array}{cccccccc}
I_1 & +I_2 & -I_3 & & & = & 0 \\
 & & I_3 & -I_4 & -I_5 & = & 0 \\
-3I_1 & +5I_2 & & & & = & -5 \\
 & -5I_2 & -12I_3 & -16I_4 & & = & -7 \\
 & & & 16I_4 & -16I_5 & = & 0
\end{array}$$

2. Matrizendarstellung $(R)*(I)=(U)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -12 & -16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3. Matrizeninversion $(R)^{-1}*(U)=(I)$, mit $(R)^{-1}=(G)$, Leitwertmatrix

$$\begin{pmatrix} 0{,}571 & 0{,}229 & -0{,}143 & -0{,}0286 & -0{,}229 \\ 0{,}343 & 0{,}137 & 0{,}114 & -0{,}0171 & -0{,}137 \\ -0{,}0857 & 0{,}366 & -0{,}0286 & -0{,}0457 & -0{,}366 \\ -0{,}0429 & -0{,}317 & -0{,}0143 & -0{,}0229 & 0{,}317 \\ -0{,}0429 & -0{,}317 & -0{,}0143 & -0{,}0229 & -0{,}683 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \end{pmatrix}$$

4. Lösung:

$$\begin{aligned}
I_1 &= 0{,}914 \; A \\
I_2 &= -0{,}451 \; A \\
I_3 &= 0{,}463 \; A \\
I_4 &= 0{,}231 \; A \\
I_5 &= 0{,}231 \; A
\end{aligned}$$

Matrizenrechnungen-Lösung des Gleichungssystems

Verfahren: Cramersche Regel

1. Matrizengleichung ($a_{11} \ldots a_{33} \Rightarrow$ Widerstandskoeffizienten, $b_1 \ldots b_3 \Rightarrow$ Zweigströme $c_1 \ldots c_3 \Rightarrow$ Quellenspannungen)

$$\begin{pmatrix} a_{11} a_{12} a_{13} \\ a_{21} a_{22} a_{23} \\ a_{31} a_{32} a_{33} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

2. Cramersche Regel

$$b_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}} = \frac{c_1(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - c_2(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + c_3(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}{a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13})}$$

$$b_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

$$b_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Anwendung des Verfahrens bis zu 3 Gleichungen sinnvoll !

Maschenstromverfahren

m = z – (k-1) Maschenströme, Gleichungen

<u>Lösungsalgorithmus</u>

1. Netzwerksstruktur, Graph, Ermittlung von z, k, m
2. Eintragung der Maschenströme mit Zählrichtung
3. Quellenspannungszählpfeile eintragen, ggf. Umrechnung von evtl. vorhandenen Stromquellen in Spannungsquellen
4. Aufstellung der Maschengleichungen mit Maschenströmen
5. Lösung des Gleichungssystems: $(R)*(I_m)=(U)$ bzw. $(R)^{-1}*(U)=(I_m)$
6. Eintragung von Zweigströmen in den Netzwerksgraph
7. Berechnung der Zweigströme aus den Maschenströmen
8. Berechnung der Zweigspannungen

Knotenspannungsverfahren

(k-1) = z – m - Knotengleichungen

Lösungsalgorithmus

1. Netzwerksstruktur, Graph, Ermittlung von z, k, m

2. Festlegung des Bezugsknotens K_0, Eintragung der Knotenspannungen mit Zählpfeilen

3. Eintragung der Zweigströme mit Zählpfeilen

4. Eintragung vorhandener Quellenspannungen bzw. Stromquellen mit Zählpfeilen

5. Aufstellung des Gleichungssystems

- Knotengleichungen
- Ersatz der Zweigströme durch Knotenspannungen, Leitwerte, Quellenspannungen
- Gleichungssystem der Knotenspannungen $(G)*(U_k)=(I_q)$

6. Lösung des Gleichungssystems: $(G)^{-1}*(I_q)=(U_k)$

7. Ermittlung der Zweigströme aus den Knotenspannungen

8. Berechnung der Zweigspannungen

Spezielle Stromkreis-Berechnungsverfahren

Ziel: Berechnung **eines** Zweigstromes oder **einer** Spannung

Überlagerungsverfahren (Superpositionsprinzip)

- Betrachtung von **Teilwirkungen** (Zweigströme) bei jeweils nur einer **Teilursache** (einzelne Quellen)

- **Überlagerung** der Teilwirkungen zur **Gesamtwirkung** (Gesamtstrom eines Zweiges)

Lösungsalgorithmus

1. Alle Spannungsquellen $U_{q1}...U_{qn}$ bis auf eine durch Kurzschluss ersetzen, bzw. alle Stromquellen $I_{k1}...I_{kn}$ bis auf eine heraustrennen

2. Teilstrom I_{z1} im betrachteten Zweig z bestimmen

3. Wiederholung des 1. und 2. Schrittes bis alle Teilströme I_{z1} ... I_{zn} bestimmt sind

4. Addition der vorzeichenbehafteten Teilströme zum Gesamtstrom

$$I_z = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} I_{z\nu}$$

Zweipoltheorie

Grundprinzip:

- Jedes lineare Netzwerk kann durch einen Grundstromkreis ersetzt werden (gleiches U-I-Verhalten an den Klemmen A-B)

- Anwendung, wenn nur ein Zweigstrom bzw. eine Spannung berechnet oder wenn ein Netzwerk bei der geschlossenen Berechnung vereinfacht werden soll

Lösungsalgorithmus:

1. Auftrennen des Netzwerkes an der Stelle des gesuchten Zweigstromes bzw. der gesuchten Spannung

   $\Rightarrow$ man erhält 2 Zweipole

2. Berechnung der Ersatzschaltungen dieser beiden Zweipole

   $\Rightarrow$ für den aktiven Ersatzzweipol: $\mathbf{R_{ie}}$, $\mathbf{U_{le}}$,
   $\Rightarrow$ für den passiven Ersatzzweipol: $\mathbf{R_{ae}}$

3. **Zusammenschaltung** der beiden Zweipole zu einem **Grundstromkreis** und Berechnung der gesuchten Größe

   $\Rightarrow$ z.B. $$I_Z = \frac{U_{le}}{R_{ie} + R_{ae}}$$