

Netzwerke bei mehrwelliger Erregung

Problemstellung

Bisher wurde bei der Berechnung von WS - bzw. DS - Netzwerken vorausgesetzt, dass alle Quellen die gleiche Frequenz besitzen

In der Praxis können aber auch Quellen mit unterschiedlichen Frequenzen in einem Netzwerk auftreten

z.B.

- durch Regelabweichungen der Quellen
- durch Oberwellen
(z.B. infolge nichtlinearer Systemelemente)
- durch nichtsinusförmige Quellen
(z.B. Impulse, Zündvorgänge)

Berechnung derartiger Vorgänge bzw. Netzzustände ist durch eine entsprechende Analyse, spezielle Überlagerungen und Transformationen (z.B. Fouriertransformation) möglich

Analyse bei mehrwelliger sinusförmiger Erregung

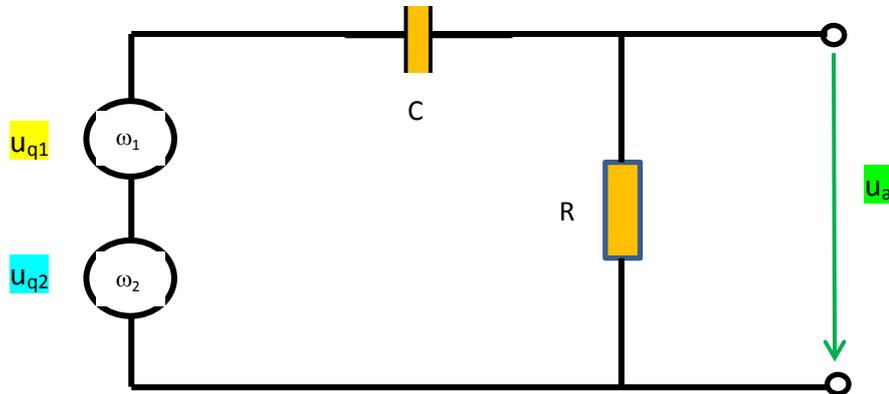
Annahme: n - Quellen ($n \geq 2$) unterschiedlicher Frequenz (*harmonische Schwingungen*)

$$\omega_k = k \cdot \omega_1 \text{ mit } k = 1, 2, 3 \dots n$$

Vorgehensweise: es gilt der Überlagerungssatz

- ① Netzwerkanalyse und Berechnung (vorzugsweise in der komplexen Ebene) in der jeweils nur die Wirkung der Quellen einer Frequenz (z.B. $\omega_k = \omega_1$) berücksichtigt wird, die Quellen mit anderen Frequenzen werden kurzgeschlossen bzw. herausgetrennt. Variation von $k = 1 \dots n$.
- ② Umwandlung der komplexen Ergebnisse in den Zeitbereich
- ③ Überlagerung der für die einzelnen Frequenzen berechneten Ströme und Spannungen im Zeitbereich

WS-Kreis mit mehrwelliger Erregung – Beispiel

zwei WS-Quellen mit unterschiedlicher Frequenz ($\omega_1; \omega_2$)ges.: $u_a(t)$

Rechenweg: Überlagerungsverfahren

(mit Zwischenschritten – Transformation in komplexe Ebene und Rücktransformation in Zeitbereich)

$$\textcircled{1} \text{ nur } u_{q1} \rightarrow \frac{U_{a1}}{U_{q1}} = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega_1 C}} \rightarrow U_{a1} = U_{q1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_1 C R}\right)^2}}$$

$$\varphi_{a1} = \varphi_{q1} + \arctan\left(\frac{1}{\omega_1 C R}\right)$$

$$\rightarrow u_{a1}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{a1} \cdot \cos(\omega_1 t + \varphi_{a1})$$

$$\textcircled{2} \text{ nur } u_{q2} \rightarrow \frac{U_{a2}}{U_{q2}} = \frac{R}{R - j\frac{1}{\omega_2 C}} \rightarrow U_{a2} = U_{q2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{1}{\omega_2 C R}\right)^2}}$$

$$\varphi_{a2} = \varphi_{q2} + \arctan\left(\frac{1}{\omega_2 C R}\right)$$

$$\rightarrow u_{a2}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{a2} \cdot \cos(\omega_2 t + \varphi_{a2})$$

③ Überlagerung

$$u_a(t) = u_{a1}(t) + u_{a2}(t)$$

Analyse periodischer nichtsinusförmiger Zeitfunktionen

Basis: Fouriertransformation

periodische Zeitfunktion allgemein: $f(t) = f(t + T_0)$

wobei T_0 – Periodendauer

falls $f(t)$ stückweise differenzierbar \rightarrow Darstellung durch sog. *Fourierreihe*

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cdot \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \cdot \sin(k\omega_0 t)$$

wobei $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ – sog. Grundschiwingung

① zeitunabhängiges Glied: (sog. *Gleichanteil*)

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) dt$$

② harmonische Teilschwingungen:

$$A_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cdot \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$B_k = \frac{2}{T_0} \int_{t_1}^{t_1+T_0} f(t) \cdot \sin(k\omega_0 t) dt$$

sowie:

$$C_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$$

und

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right)$$

③ Gesamtdarstellung:

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

Analyse periodischer nichtsinusförmiger Zeitfunktionen (2)

Fouriertransformation

$$f(t) = C_0 + \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot \cos(k\omega_0 t - \varphi_k)$$

diese Transformation $f(t) \rightarrow F(\omega)$ ermöglicht die Funktionsdarstellung im Zeitbereich einer Funktionsdarstellung im Frequenzbereich gegenüberzustellen und umgekehrt.

Im Frequenzbereich bedeuten: $C_0; C_k$ - das *Amplitudenspektrum*
 φ_k - das *Phasenspektrum*

Schwingung mit der tiefsten Frequenz	$k = 1; \omega_1 = \omega_0$	Grundschiwingung bzw. 1. Harmonische
Schwingung mit der zweitniedrigsten Frequenz	$k = 2; \omega_2 = 2\omega_0$	1. Oberschwingung bzw. 2. Harmonische
Schwingung mit der drittniedrigsten Frequenz	$k = 3; \omega_2 = 3\omega_0$	2. Oberschwingung bzw. 3. Harmonische
....
allgemein		(k-1)-te Oberschwingung bzw. k-te Harmonische

welche Harmonische auftreten können, hängt von der Art der Zeitfunktion $f(t)$ ab, Unterscheidung zwischen geraden und ungeraden Funktionen

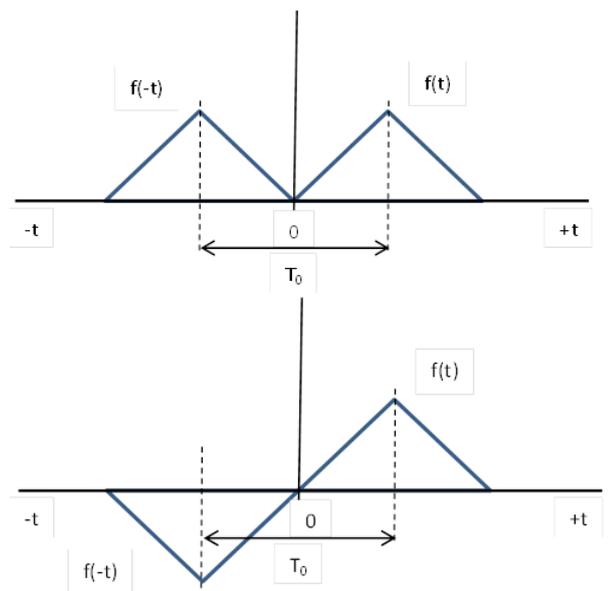
① gerade Funktionen $f(-t) = f(t)$

→ $B_k = 0$ da $\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

② ungeraden Funktionen $f(-t) = -f(t)$

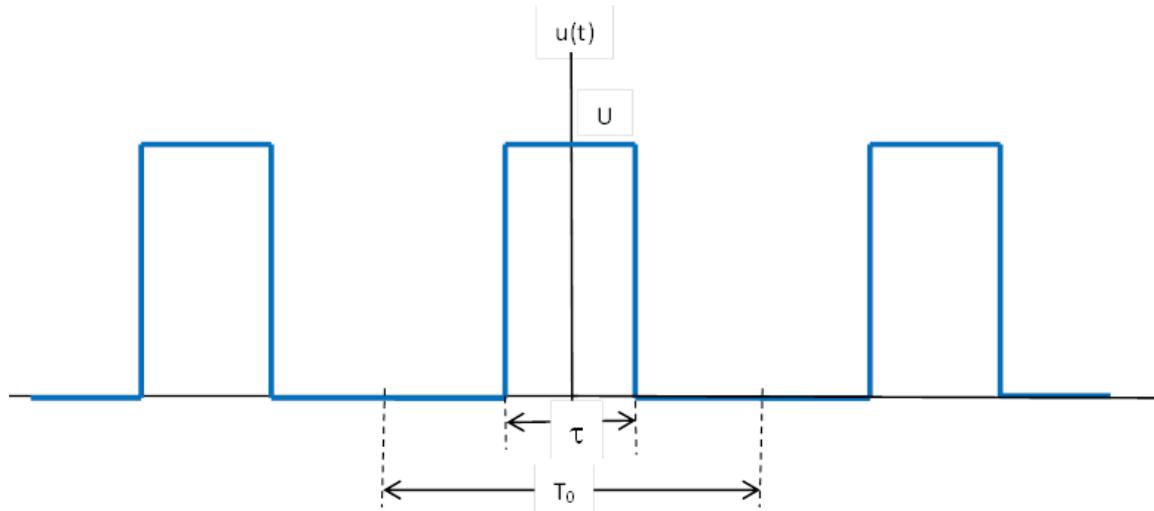
→ $A_k = 0$ und $C_0 = 0$

da $\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$



Analyse periodischer nichtsinusförmiger Zeitfunktionen (2)

Beispiel: periodische Rechteckspannung



$u(t)$ ist eine gerade Funktion $\rightarrow B_k = 0$

$$C_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} u(t) dt = \frac{1}{T_0} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} u(t) dt = \frac{U}{T_0} \cdot \left[\frac{\tau}{2} - \left(-\frac{\tau}{2} \right) \right] = U \frac{\tau}{T_0}$$

$$A_k = C_k = \frac{2}{T_0} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} u(t) \cos(k\omega_0 t) dt = \frac{2U}{T_0} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} \cos(k\omega_0 t) dt$$

$$C_k = \frac{2U}{k\omega_0 T_0} \left[\sin\left(\frac{k\omega_0 \tau}{2}\right) - \sin\left(-\frac{k\omega_0 \tau}{2}\right) \right]$$

mit $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \rightarrow$

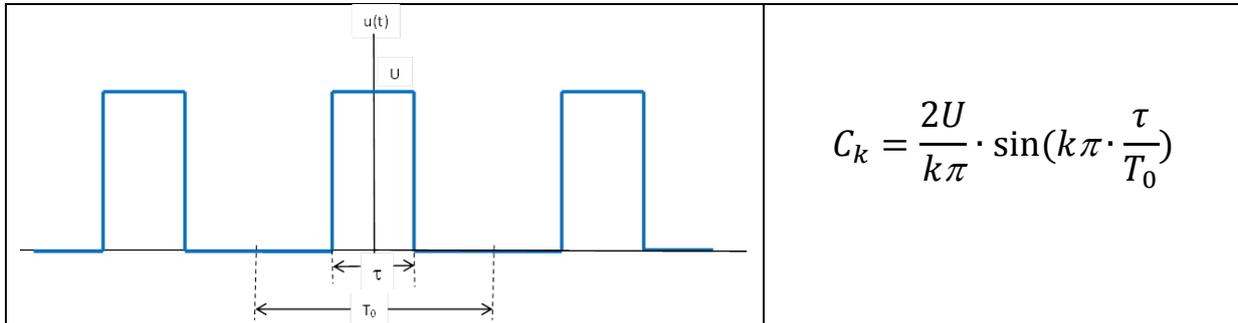
$$C_k = \frac{2U}{k\pi} \cdot \sin\left(k\pi \cdot \frac{\tau}{T_0}\right)$$

d.h. alle k-Werte treten auf (1.-; 2.-; 3.-....Harmonische)

$$\varphi_k = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) = 0 \text{ für alle k-Werte}$$

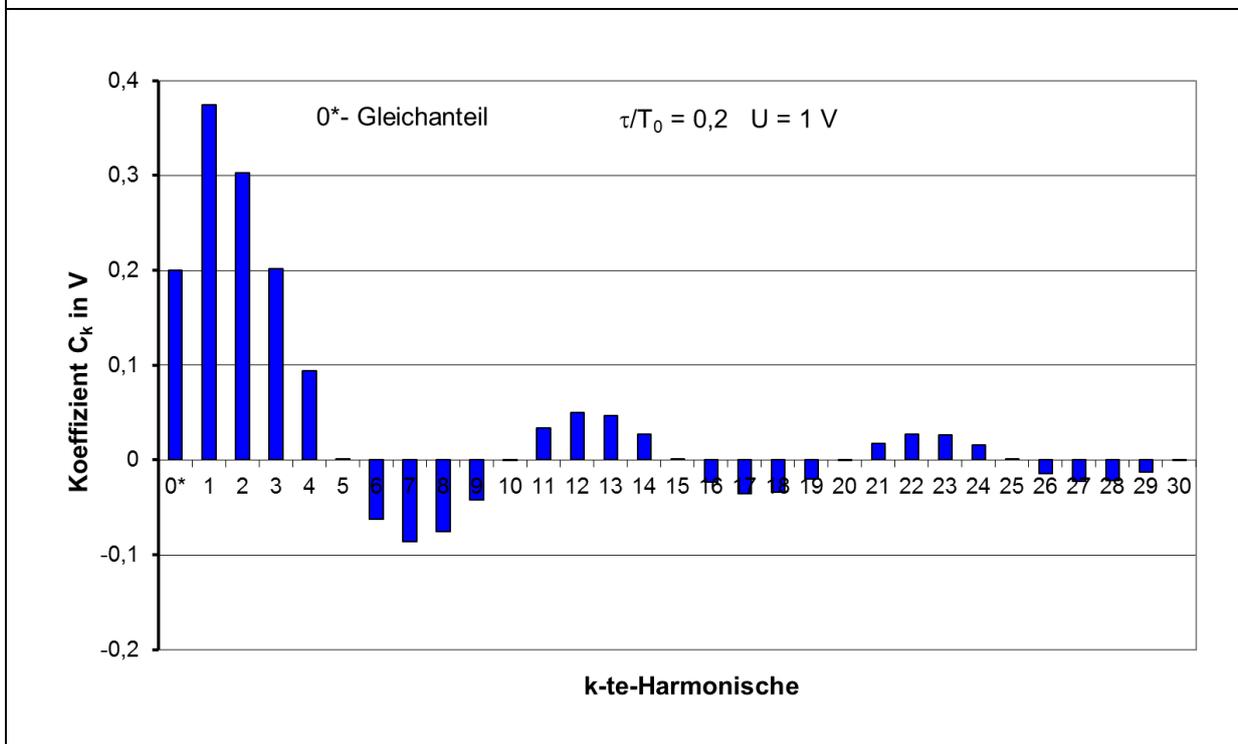
Analyse periodischer nichtsinusförmiger Zeitfunktionen (3)

Beispiel: periodische Rechteckspannung



Hintransformation: $u(t) \rightarrow U(\omega)$

Amplituden-Frequenzspektrum für ein Zahlenbeispiel



Rücktransformation $U(\omega) \rightarrow u(t)$

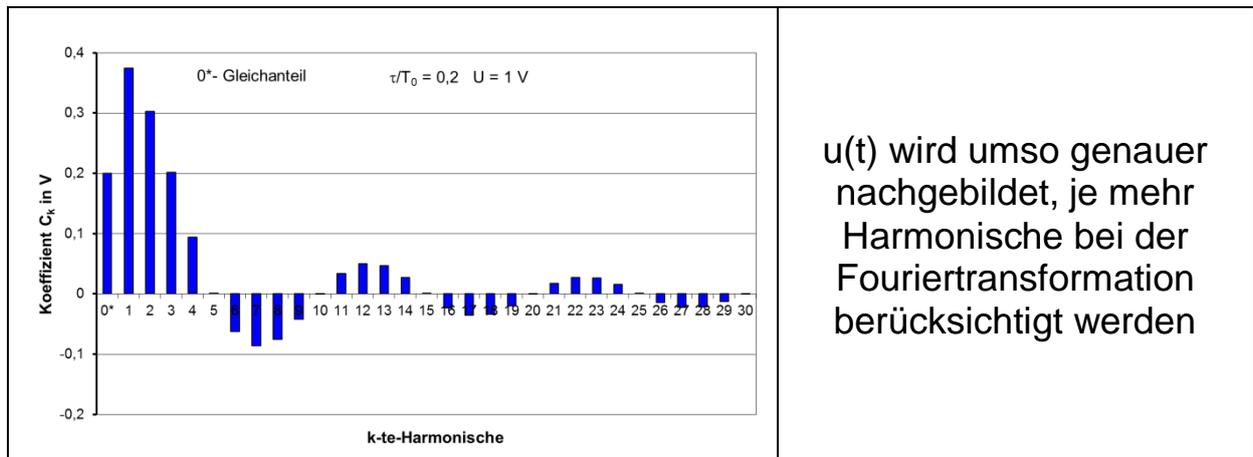
$$u(t) = C_0 + C_1 \cdot \cos(\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(2\omega_0 t) + C_2 \cdot \cos(3\omega_0 t) + \dots$$

wobei

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

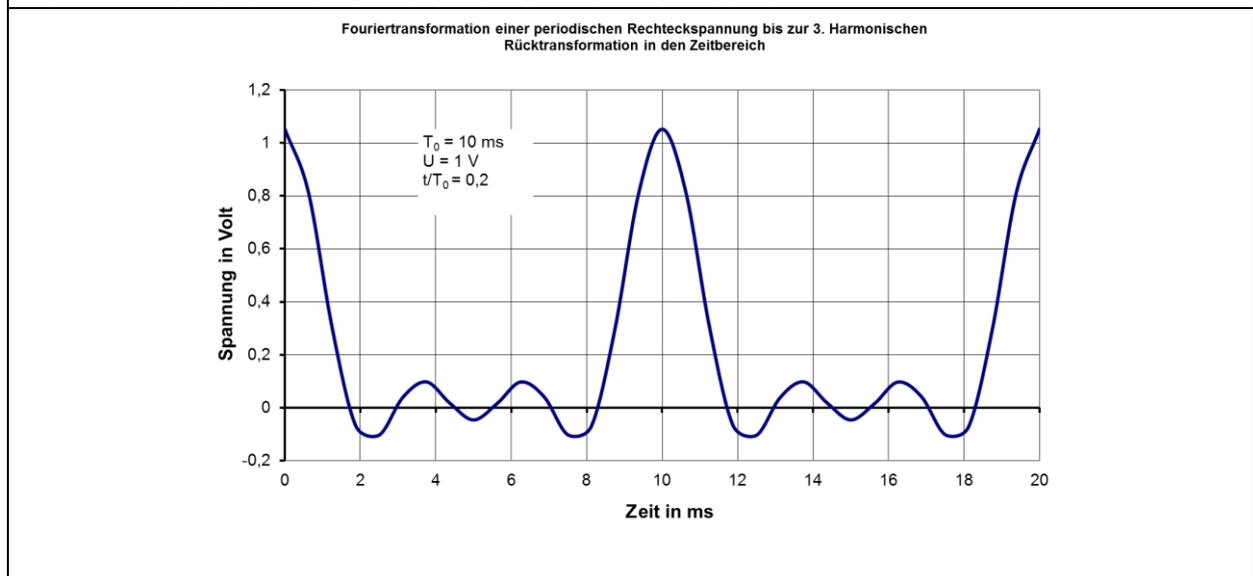
Analyse periodischer nichtsinusförmiger Zeitfunktionen (3)

Beispiel: periodische Rechteckspannung

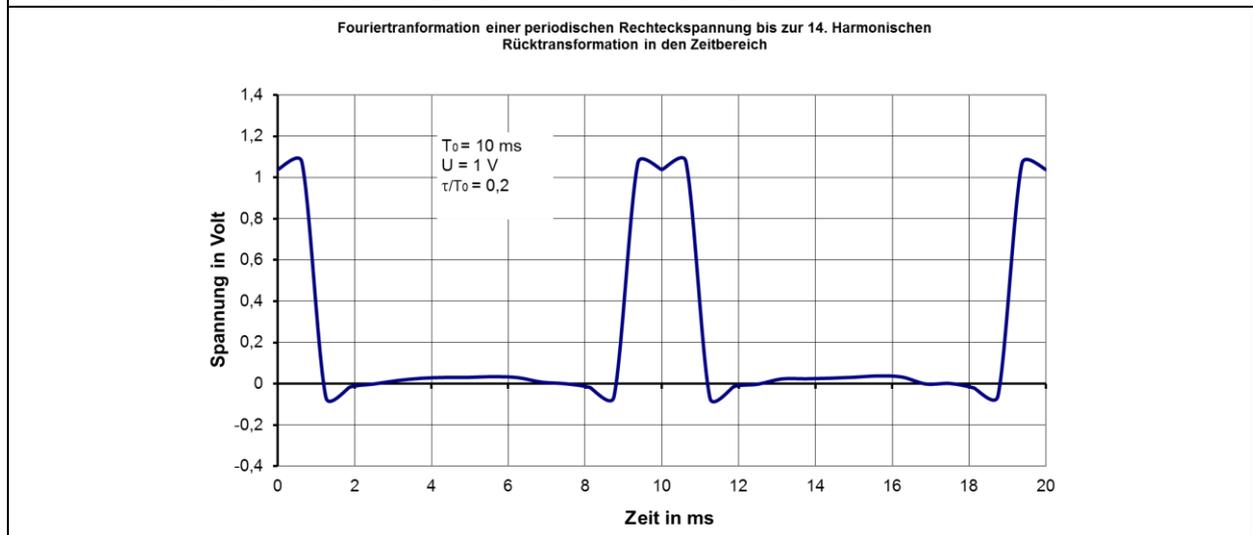


$u(t)$ wird umso genauer nachgebildet, je mehr Harmonische bei der Fouriertransformation berücksichtigt werden

Fall 1: Transformation bis zur 3. Harmonischen



Fall 2: Transformation bis zur 14. Harmonischen



Fourierdarstellung nichtperiodischer Zeitfunktionen

Problem: für die Beschreibung nichtperiodischer bzw. einmaliger Zeitvorgänge ($T \rightarrow \infty$) reicht Summe harmonischer Schwingungen diskreter Frequenzen nicht aus.

Lösungsansatz:

Fourierreihe geht mit $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$ in ein Integral (kontinuierliches Frequenzspektrum) über, es gilt:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega - \text{sog. Fourierintegral}$$

Die Bildfunktion (*Fouriertransformierte*) lautet dann:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad \text{und existiert, wenn}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt - \text{endlich ist.}$$

$F(\omega) \equiv$ Frequenzspektrum von $f(t)$

und ist i. Allg. komplex, d.h.:

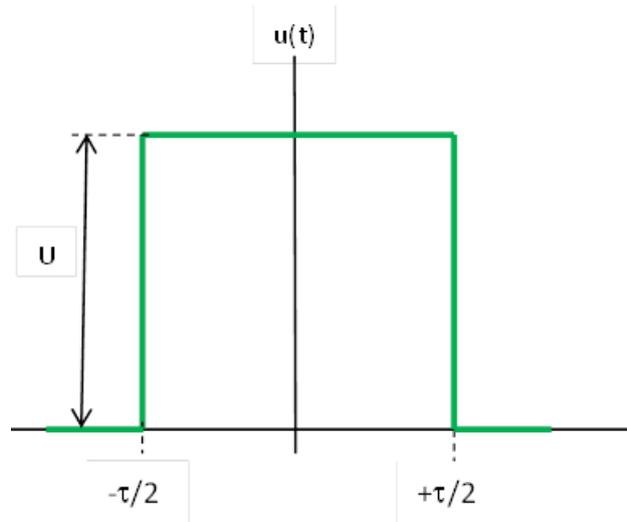
$F(\omega)$ enthält Amplitude und Phase

Analyse nichtperiodischer Zeitfunktionen

Beispiel: Rechteckimpuls

$$F(\omega) = \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} u(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

$$F(\omega) = U \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} e^{-j\omega t} dt$$



mit

$$\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$$

→

$$F(\omega) = \frac{U}{j\omega} [e^{+j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}]$$

mit

$$e^{j\omega\tau/2} = \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) + j\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

→

und

$$e^{-j\omega\tau/2} = \cos\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - j\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

$$F(\omega) = \frac{2U}{\omega} \sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$$

bezogene Darstellung

$$\frac{F(\omega)}{U \cdot \tau} = \frac{\sin\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)}{\frac{\omega\tau}{2}}$$

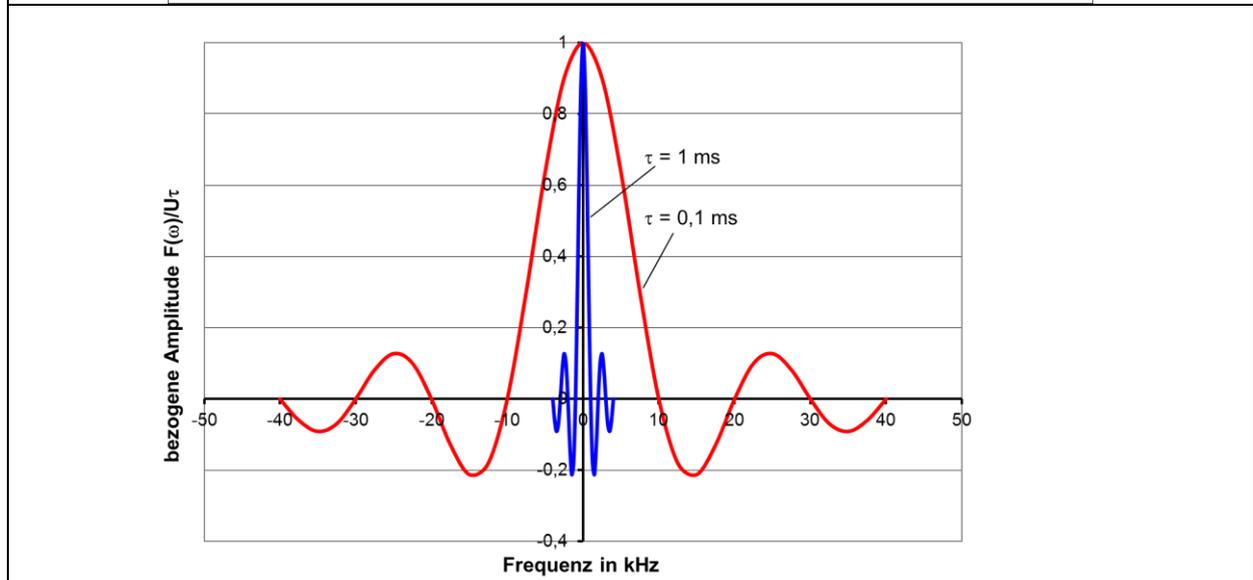
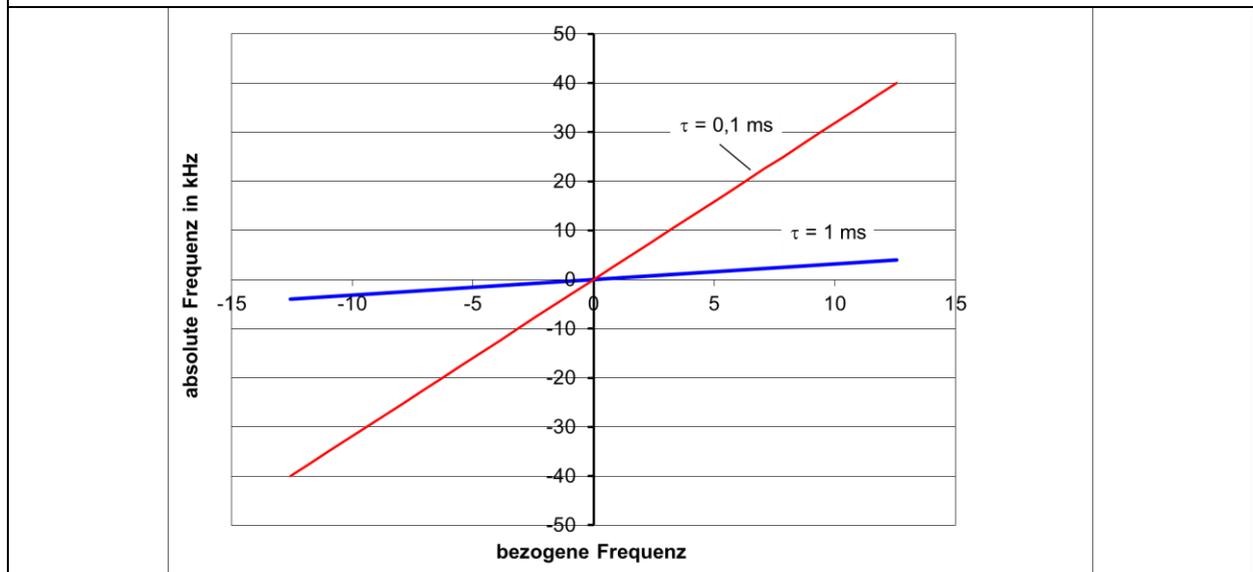
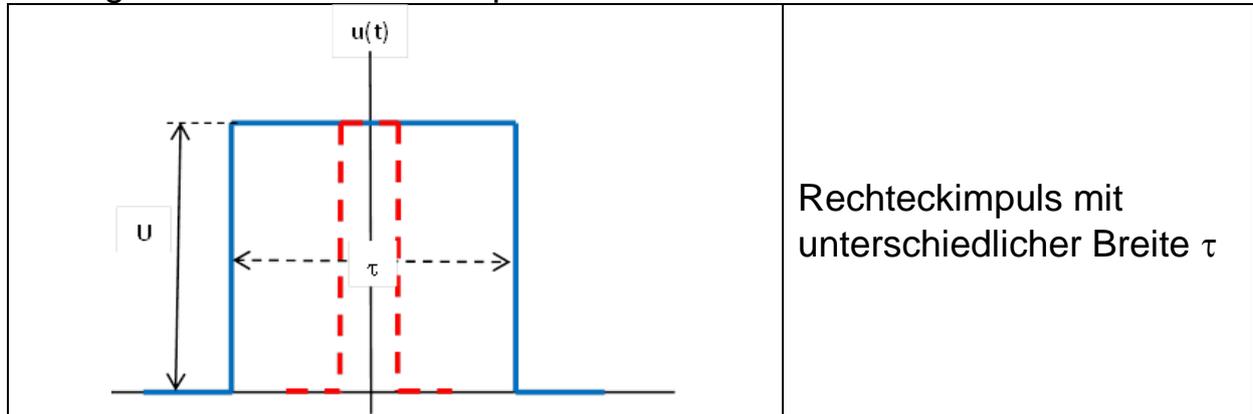
Einführung einer bezogenen
Frequenz

$$x = \frac{\omega\tau}{2}$$

$$\frac{F(x)}{U \cdot \tau} = \frac{\sin x}{x}$$

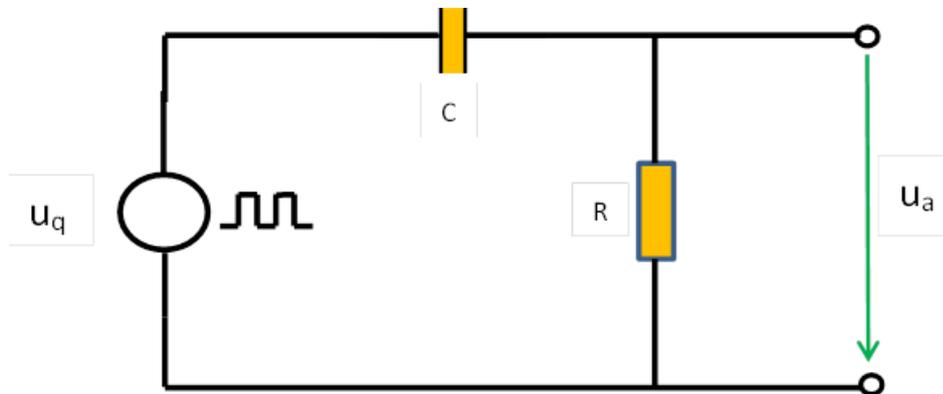
Analyse nichtperiodischer Zeitfunktionen

Beispiel: Frequenzspektrum – Rechteckimpuls bezogene und absolute Frequenz



Analyse linearer Netzwerke bei nichtsinusförmiger Erregung

Beispiel (RC-Schaltung) – ges.: $u_a(t)$



1. Schritt Zerlegung der period. Rechteckspannung u_q mit Fourier-Reihenentwicklung

Amplituden-Frequenzspektrum der Quellenspannung, $u_{qk}(\omega)$ – Werte

2. Schritt Berechnung der Übertragungsfunktion in der komplexen Ebene (Betrag und Phasenwinkel) für „ausreichend“ breites Frequenzspektrum

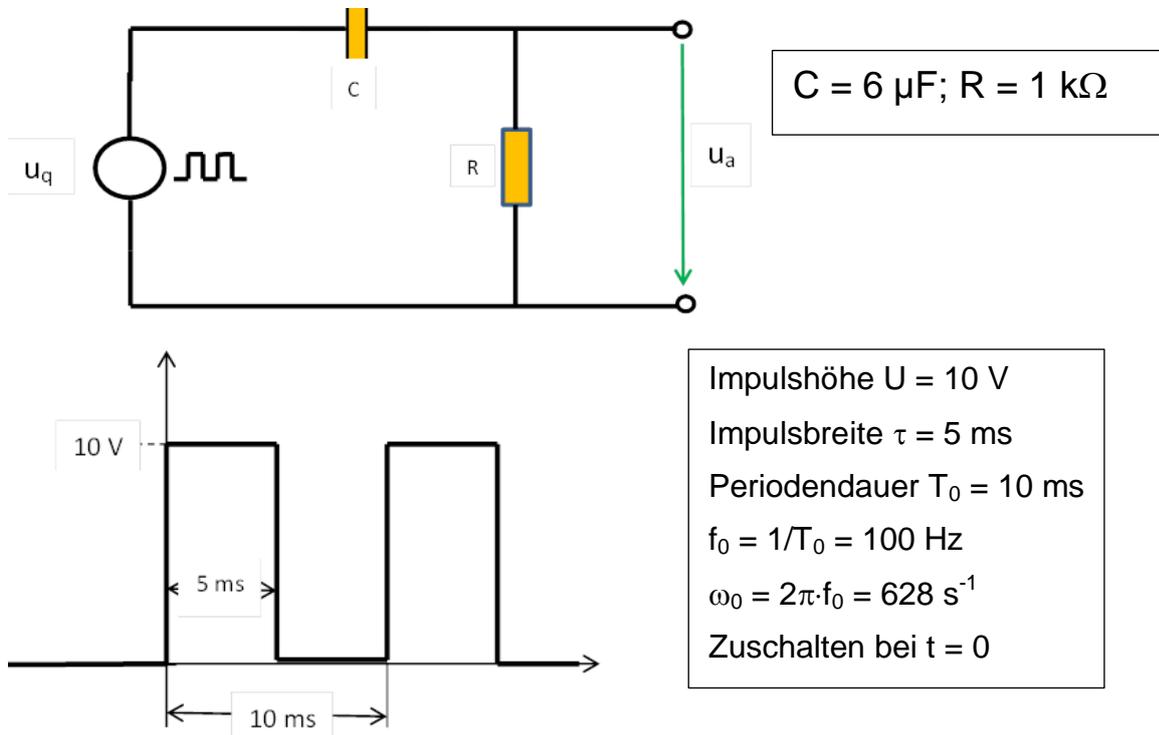
$\hat{u}_{ak}(\omega)$ – und φ_{ak} – Werte

3. Schritt Rücktransformation in den Zeitbereich und Überlagerung

$$u_a(t) = \sum_{k=1}^{k=n} \hat{u}_{ak} \cdot \cos(\omega_k t \pm \varphi_{ak})$$

Analyse linearer Netzwerke bei nichtsinusförmiger Erregung (2)

Beispiel: RC-Schaltung mit Zahlenwerten



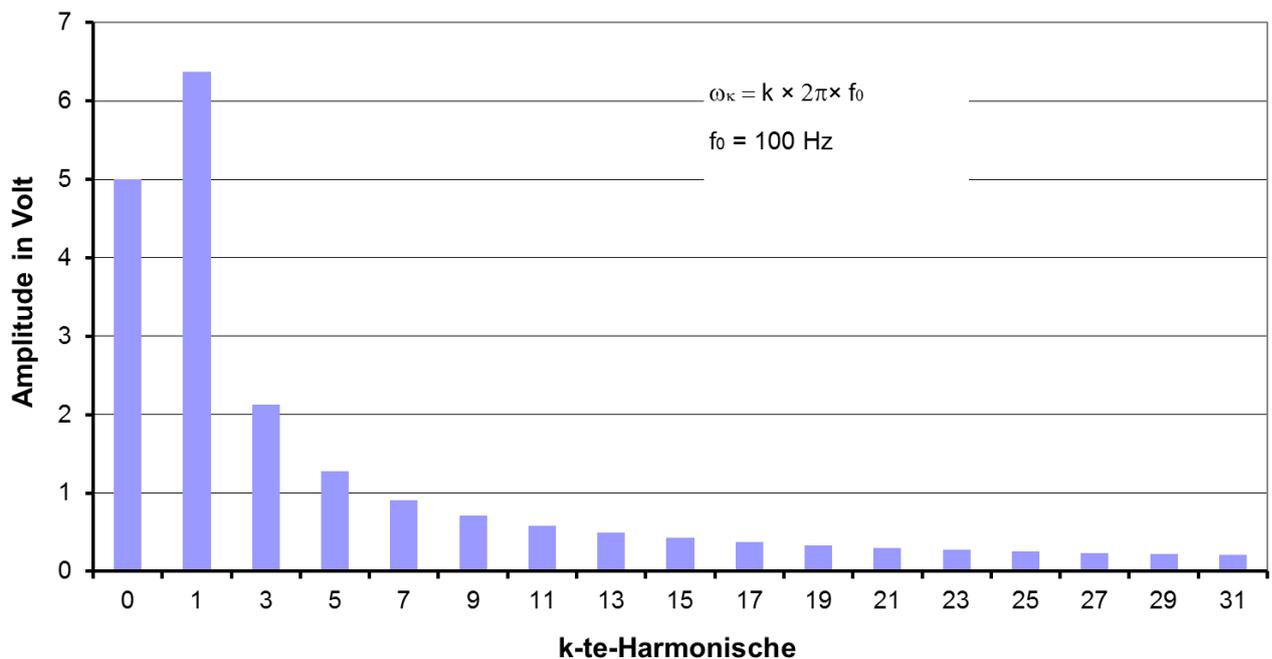
<p>1. Schritt</p>	$C_0 = U \cdot \frac{\tau}{T_0} = 5 \text{ V}$ $B_k = C_k = \frac{U}{k \cdot \pi} [1 - \cos(k \cdot \pi)]$ <p>für ungerade k-Werte ($k = 1; 3; 5, \dots$):</p> $C_k = \frac{2U}{k \cdot \pi}$ <p>für gerade k-Werte ($k = 2; 4; 6 \dots$):</p> $C_k = 0$ $\varphi_k = \arctan\left(\frac{B_k}{A_k}\right) = 90^\circ$ <p>für alle k- Werte</p>
--------------------------	--

Analyse linearer Netzwerke bei nichtsinusförmiger Erregung (3)

Beispiel: RC-Schaltung mit Zahlenwerten

Ergebnis 1. Schritt:

Amplitudenspektrum-Quellenspannung



1. Schritt

Berechnung von $\hat{u}_{ak}(\omega)$ und $\varphi_{ak}(\omega)$ für $k = 1;3;5;7\dots 21$

Ansatz:

$$\frac{\underline{U}_a}{\underline{U}_q} = \frac{R}{R - j \frac{1}{\omega C}}$$

→

$$\hat{u}_{ak} = \hat{u}_{qk} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1 + (\frac{1}{\omega_k RC})^2)}}$$

sowie

$$\varphi_{ak} = \varphi_{qk} + \arctan\left(\frac{1}{\omega_k RC}\right)$$

Analyse linearer Netzwerke bei nichtsinusförmiger Erregung (4) Beispiel: RC-Schaltung mit Zahlenwerten

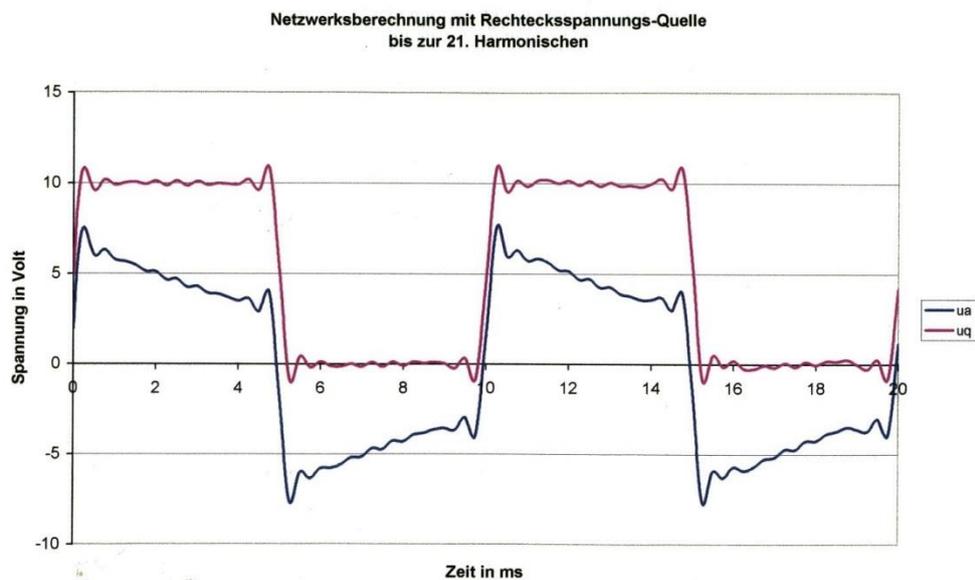
Ergebnis 2. Schritt:

k	u_{qk}/V	$\varphi_{uqk}/^\circ$	u_{ak}/V	$\varphi_{ak}/^\circ$
0	5,00	0	0*	0
*1	6,37	-90	6,15	-75,16
3	2,12	-90	2,11	-84,95
5	1,27	-90	1,27	-86,97
7	0,91	-90	0,91	-87,83
9	0,71	-90	0,71	-88,31
11	0,58	-90	0,58	-88,62
13	0,49	-90	0,49	-88,83
15	0,42	-90	0,42	-88,99
17	0,37	-90	0,37	-89,1
19	0,34	-90	0,34	-89,2
21	0,30	-90	0,30	-89,28
...	...	-90

*Gleichspannungsanteil ($\omega=0$) wird über C nicht übertragen

3. Schritt

Rücktransformation für u_q und u_a unter Berücksichtigung bis zur 21. Harmonischen ($k = 21$)



Hinweis: $u_a(t) \sim i(t)$ – beim Aufladen/Entladen des Kondensators